Devoir en temps libre °6 : Dynamique du point

Problème 1 : Nuages et pluie

On étudie quelques aspects de la physique de la pluie. On considère des gouttes d'eau, de masse volumique notée ρ modélisées par des sphères de rayon noté r, constant sauf mention explicite du contraire. Les frottements avec l'air sont responsables d'une force dite « de traînée », de même sens et de direction opposée à celle du vecteur vitesse, notée $\overrightarrow{F_1}$ et donnée par :

$$\overrightarrow{F_1} = -6\pi\eta r \overrightarrow{v}, \qquad (1)$$

où η est une constante positive. On néglige la poussée d'Archimède.
Données : masse volumique $\rho = 1{,}0\cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$, $\eta = 1{,}7\cdot 10^{-5}\,\mathrm{N\cdot s\cdot m^{-2}}$, constante d'accrétion $\lambda = 5\cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^{-1}}$. On rappelle l'expression du volume d'une sphère de rayon r : $V_r = 4\pi r^3/3$.

I Gouttes de rayon constant

On considère une goutte de rayon r en chute libre dans le champ de pesanteur terrestre.

I.1. On néglige dans cette question la force de frottement $\overrightarrow{F_1}$.

(**a**) Établir l'équation différentielle d'évolution de l'altitude z de la goutte.

(**b**) L'atmosphère est modélisée par une couche uniforme de hauteur $h = 8{,}0\,\mathrm{km}$. Déterminer l'expression et calculer la valeur de la durée T_0 mise par la goutte pour chuter de h si elle était immobile à l'altitude h.

I.2. On prend maintenant en compte l'effet de la force de frottement $\overrightarrow{F_1}$.

(**a**) Justifier la dimension de la constante η.

(**b**) Établir l'équation différentielle d'évolution de la vitesse verticale $\dot{z}$. Identifier une vitesse limite, notée $v_{\infty,1}$ et un temps caractéristique τ_1.

(**c**) En déduire l'expression de l'altitude z en fonction du temps. On considère de nouveau une goutte initialement immobile en $z = h$ et on utilisera $v_{\infty,1}$ et τ_1.

(**d**) Calculer numériquement $v_{\infty,1}$ et τ_1 pour des gouttes de rayon $r = 1{,}0\cdot 10^{-2}\,\mathrm{mm}$ et $r = 1{,}0\cdot 10^{-1}\,\mathrm{mm}$.

I.3. On considère la chute d'une hauteur $h = 8{,}0\,\mathrm{km}$. Calculer la valeur de $v_{\infty,1}\tau_1$ et en déduire une approximation très simple de la durée d'une chute de hauteur qu'on notera T_1.

II Arrosage

On considère dans cette partie l'arrosage d'un jardin par un jet d'eau qu'on considère suffisamment fragmenté pour être modélisable par des gouttes d'eau de rayon $r = 2\,\mathrm{mm}$.
Les gouttes d'eau sont émises depuis le sol, avec un vecteur vitesse noté $\overrightarrow{v_0}$ de même norme, notée $v_0 = 5{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, et avec une direction variable, caractérisée par l'angle α formé par $\overrightarrow{v_0}$ et l'horizontale.

II.1. On néglige dans cette question la force de frottement de l'équation (1) due à l'air.

(**a**) Déterminer l'expression de la trajectoire en fonction de la norme v_0, de l'angle α et de l'accélération de la pesanteur g.

(**b**) En déduire l'expression de la distance maximale à laquelle peut tomber une goutte d'eau quand l'angle α varie entre 0° et 90°.

(**c**) Pour $\alpha = 45°$, déterminer la durée du mouvement avant qu'une goutte n'atteigne le sol. Déterminer également la masse totale d'eau en l'air si le débit massique du jet est $D = 100\,\mathrm{g\cdot s^{-1}}$.

II.2. On modélise désormais les frottement sur une goutte par une force dont la norme a pour expression :

$$F_2 = \beta r^2 v^2, \qquad (2)$$

avec $\beta = 0{,}69\,\mathrm{kg/m^3}$.

Déterminer comme au **I.2b** les expressions et les valeurs numériques de la vitesse limite et du temps caractéristique pour les deux valeurs des rayons des gouttes

II.3. On décrit le mouvement dans le plan O, x, z, avec $\overrightarrow{e_z}$ selon la verticale ascendante et $\overrightarrow{e_x}$ tel que $\overrightarrow{v}_0$ soit dans le plan $\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_z}$.

(**a**) Établir les équations différentielles vérifiées par les coordonnées sans dimension :

$$X = \frac{x}{v_\infty \tau} \qquad Z = \frac{z}{v_\infty \tau},$$

et leurs dérivées X' et Z' par rapport à la grandeur sans dimension t/τ.

(**b**) Utiliser le code python de l'activité (`0eed-325595` sur capytale) pour résoudre cette équation différentielle avec les conditions initiales : $\alpha = 45°$ et $v_0 = 50\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, pour les deux valeurs de rayon : $r = 2{,}0\,\mathrm{mm}$ et $r = 0{,}1\,\mathrm{mm}$.

(**c**) Tracer dans ces deux cas la trajectoire X, Z ainsi que la trajectoire x, z en grandeurs dimensionnées. Préciser également la valeur de la flèche et de la portée.

III Coalescence de gouttes

On étudie l'évolution du rayon d'une goutte au cours de sa chute dans un nuage. Elle agrège en effet les gouttes plus petites immobiles qu'elle rencontre et on admet alors que sa masse m croît selon la loi suivante :

$$\frac{1}{m(t)}\frac{\mathrm{d}m(t)}{\mathrm{d}t} = \lambda v(t), \qquad (3)$$

où v désigne la norme du vecteur vitesse de la goutte, et λ une constante.
La goutte est maintenant un système à masse variable ; on admet que la loi de la quantité de mouvement s'écrit alors, en notant $\overrightarrow{F_{\mathrm{tot}}}$ la résultante des forces auxquelles est soumise la goutte :

$$\overrightarrow{F_{\mathrm{tot}}} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m(t)\overrightarrow{v}(t)}{\mathrm{d}t}. \qquad (4)$$

III.1. On considère dans cette question qu'on peut négliger la force de frottement de l'équation (1).

(**a**) Établir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse verticale $\dot{z}$. On fera apparaître une vitesse limite $v_{\infty,2}$ et un temps caractéristique τ_2, dont on calculera les valeurs.

(**b**) Résoudre cette équation différentielle, on rappelle que :

$$\text{une primitive de : } u \mapsto \frac{1}{1-u^2} \qquad \text{est : } u \mapsto \operatorname{argth}(u), \tag{5}$$

et que :

$$\text{une primitive de : } u \mapsto \tanh(u) \qquad \text{est : } \ln(\cosh(u)) \tag{6}$$

En déduire la durée de chute à travers un nuage de hauteur h_2. Aurait-on pu obtenir ce résultat par une approximation similaire à celle du **I.3** ?

III.2. (**a**) Établir l'équation différentielle d'évolution du rayon r d'une goutte en fonction de l'altitude z.

(**b**) Résoudre cette équation différentielle et en déduire les rayon des gouttes après la traversée d'un nuage de hauteur h_2 si les rayons en haut du nuage ont les valeurs de la question **I.2d**.

III.3. (**a**) Calculer la valeur du rayon d'une goutte pour laquelle la vitesse limite de la question **I.2b** est égale à celle de la question **III.1a**.

(**b**) Commenter la pertinence de l'approximation consistant à négliger la force de frottement de l'équation (1) devant le phénomène de coalescence.

Correction du problème 1

I Gouttes de rayon constant

I.1. (**a**) On applique la loi de la quantité de mouvement à une goutte, de masse m, soumise à son seul poids $\overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{e_z}$. On a immédiatement :

$$m\overrightarrow{a} = -mg\overrightarrow{e_z} \rightarrow \ddot{z} = -g. \tag{7}$$

(**b**) Cette équation s'intègre immédiatement en :

$$z = -\frac{gt^2}{2} \rightarrow T_0 = \sqrt{2h/g} = 40\,\text{s}. \tag{8}$$

I.2. (**a**) Une force s'exprime en N, et le produit rv en $\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$, la constante η est donc homogène à des $\text{N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-2}$.

(**b**) La loi de la quantité de mouvement s'écrit désormais :

$$m\frac{\text{d}^2\overrightarrow{OM}}{\text{d}t^2} = -mg\overrightarrow{e_z} - 6\pi\eta r\overrightarrow{v}. \tag{9}$$

La goutte étant initialement immobile, le poids lui communique une accélération verticale et donc une vitesse elle aussi verticale. La force de frottement, étant de même direction que le vecteur vitesse, sera donc elle aussi verticale et le mouvement restera vertical. La vitesse sera selon $-\overrightarrow{e_z}$ et la force de frottement qui s'y oppose selon $+\overrightarrow{e_z}$. On a donc :

$$m\ddot{z} = -mg - 6\pi\eta r\dot{z} \qquad \ddot{z} + \frac{6\pi\eta r}{m}\dot{z} = -g. \tag{10}$$

On identifie donc la vitesse limite v_∞, norme de $\dot{z}$ quand $\ddot{z} = 0$ et le temps caractéristique τ_1 :

$$v_{\infty,1} = \frac{mg}{6\pi\eta r} \qquad \tau_1 = \frac{m}{6\pi\eta r}, \tag{11}$$

pour écrire :

$$\ddot{z} + \frac{\dot{z}}{\tau_1} = -\frac{v_{\infty,1}}{\tau_1}. \tag{12}$$

(**c**) Compte tenu de la condition initiale $\dot{z}(0) = 0$, on intègre cette équation différentielle linéaire d'ordre 1 en :

$$\dot{z} = -v_{\infty,1}\left(1 - \exp(-t/\tau_1)\right), \tag{13}$$

qui s'intègre encore une fois, en tenant compte de la condition initiale $z(0) = h$:

$$z = h - v_{\infty,1}t + v_{\infty,1}\tau_1\left(1 - \exp(-t/\tau_1)\right) \tag{14}$$

(**d**) On calcule, avec la masse de la goutte $m = 4\pi r^3\rho/3$, pour $r = 1{,}0\cdot 10^{-2}\,\text{mm}$

$$v_{\infty,1} = \frac{mg}{6\pi\eta r} = \frac{2r^2 g\rho}{9\eta} = 1{,}3\cdot 10^{-2}\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1} \qquad \tau_1 = \frac{v_{\infty,1}}{g} = 1{,}3\cdot 10^{-3}\,\text{s}. \tag{15}$$

Les valeurs sont 100 fois plus grandes pour $r = 1{,}0\cdot 10^{-1}\,\text{mm}$.

I.3. On calcule :

$$r = 1{,}0\cdot 10^{-2}\,\text{mm} : v_{\infty,1}\tau_1 = 1{,}7\cdot 10^{-5}\,\text{m} \qquad r = 1{,}0\cdot 10^{-1}\,\text{mm} : v_{\infty,1}\tau_1 = 1{,}7\cdot 10^{-1}\,\text{m}$$

L'ordre de grandeur de la distance parcourue par une goutte quand sa vitesse devient indiscernable de la vitesse asymptotique v_∞ est donc toujours très faible devant la hauteur du nuage. On peut alors conclure que la goutte est quasiment toujours en mouvement rectiligne uniforme. Les durées de traversée sont donc :

$$r = 1{,}0\cdot 10^{-2}\,\text{mm} : T_1 \simeq \frac{h}{v_{\infty,1}} = 6{,}15\cdot 10^5\,\text{s} = 170\,\text{h}.$$
$$r = 1{,}0\cdot 10^{-1}\,\text{mm} : T_1 \simeq \frac{h}{v_{\infty,1}} = 6{,}15\cdot 10^3\,\text{s} = 1{,}0\cdot 10^2\,\text{min}.$$

II Arrosage

II.1. On retrouve la chute libre sans frottement dans $\overrightarrow{g}$.

(**a**) Comme vu en cours, on a :

$$z = \frac{v_0^2\sin^2(\alpha)}{2g} - \frac{g}{2v_0^2\cos^2(\alpha)}\left(x - \frac{v_0^2\sin(2\alpha)}{2g}\right)^2 \tag{16}$$

(**b**) On reconnaît l'équation d'une parabole qui passe par $x = 0; z = 0$ et dont le sommet est atteint en $x \equiv x_s = v_0^2\sin(2\alpha)/(2g)$. Le point de chute est donc en $x = 2x_s$, maximal quand $\sin(2\alpha)$ est maximal soit pour $\alpha = 45°$. On a donc :

$$x_{\text{max}} = \frac{v_0^2}{g}. \tag{17}$$

(**c**) L'équation verticale du mouvement est :

$$z = v_0\sin(\alpha)t - \frac{gt^2}{2} = \frac{v_0\sqrt{2}t}{2} - \frac{gt^2}{2}. \tag{18}$$

Une goutte d'eau retombe donc au sol pour :

$$z = 0 \rightarrow \Delta t = \frac{v_0\sqrt{2}}{g} = 7{,}2\cdot 10^{-1}\,\text{s}. \tag{19}$$

Considérons un intervalle de temps de durée Δt. L'eau émise durant Δt n'a pas le temps d'atteindre le sol mais toute l'eau précédemment en l'air est retombée. La masse en l'air, notée m_a, est donc le produit :

$$m_a = D\Delta t = 72\,\text{g}. \tag{20}$$

II.2. La loi de la quantité de mouvement s'écrit :

$$m\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2} = m\overrightarrow{g} - \beta r^2 v\overrightarrow{v}. \tag{21}$$

On détermine la vitesse limite en écrivant $\dddot{\overrightarrow{OM}} = \overrightarrow{0}$ *ie* :

$$v_\infty = \sqrt{\frac{mg}{\beta r^2}} = \sqrt{\frac{4\pi r\rho g}{3\beta}} = 7{,}7\cdot 10^{-1}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \qquad \text{ou : } 2{,}4\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \tag{22}$$

Comme précédemment le temps caractéristique est :

$$\tau = \frac{v_\infty}{g} = 7{,}9\cdot 10^{-2}\,\mathrm{s} \qquad \text{ou : } 2{,}5\cdot 10^{-1}\,\mathrm{s}. \tag{23}$$

II.3. (**a**) Pour un mouvement bidimensionnel la force de frottement s'écrit :

$$\overrightarrow{F}_2 = -\beta r^2 v^2\frac{\overrightarrow{v}}{v} = -\beta r^2 v\overrightarrow{v} = -\beta r^2\sqrt{(v_x^2 + v_z^2)}\,(v_x\overrightarrow{e_x} + v_z\overrightarrow{e_z}).$$

La loi de la quantité de mouvement est donc :

$$m\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2} = m\overrightarrow{g} - \beta r^2\sqrt{(v_x^2 + v_z^2)}\,(v_x\overrightarrow{e_x} + v_z\overrightarrow{e_z}).$$

En posant $x = X(v_\infty)\tau$, $z = Z(v_\infty\tau)$, $t = \tau T$, et en utilisant $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}$, on obtient après simplifications :

$$\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}T^2} = -\overrightarrow{e_z} + \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}T}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}T}\right)^2}\left(\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}T}\overrightarrow{e_x} + \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}T}\overrightarrow{e_z}\right).$$

(**b**) Le code python correspondant est accessible dans le notebook (`8a7f-341983` sur capytale), on y a calculé les trajectoires pour les rayons $r = 2\,\mathrm{mm}$ et $0{,}1\,\mathrm{mm}$ et pour une vitesse de $v_0 = 50\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, très rapide pour un jet d'eau. En effet, pour des vitesses plus raisonnables, les frottements sont négligeables pour ces tailles de gouttes.

(**c**) Les frottements ne sont notables que pour le rayon le plus faible ($r = 0{,}1\,\mathrm{mm}$) : l'autre cas donne une trajectoire parabolique d'une chute dans le vide. On mesure la flèche $z_{\max}$ et la portée $x_{\max}$:

$r = 0{,}1\,\mathrm{mm}$: $x_{\max} = 8{,}8\,\mathrm{m}$ et $z_{\max} = 4{,}8\,\mathrm{m}$;
$r = 2\,\mathrm{mm}$: $x_{\max} = 2{,}2\cdot 10^2\,\mathrm{m}$ et $z_{\max} = 5{,}9\cdot 10^1\,\mathrm{m}$.

On vérifie que dans ce dernier cas, on retrouve des valeurs proches du cas sans frottement : $x_{\max} = v_0^2\sin(2\alpha)/g = 2{,}5\cdot 10^2\,\mathrm{m}$ et $z_{\max} = v_0\,(\sin(\alpha))^2/(2g) = 6{,}4\cdot 10^1\,\mathrm{m}$.

III Coalescence de gouttes

III.1. (**a**) Comme précédemment, la vitesse sera selon $-\overrightarrow{e_z}$, sa norme $v(t)$ s'exprimera donc comme $v(t) = -\dot z$. On a finalement, en négligeant la force de frottement due à l'air, et en projection sur $\overrightarrow{e_z}$:

$$-m(t)g = \frac{\mathrm{d}m(t)\dot z}{\mathrm{d}t} = m(t)\frac{\mathrm{d}\dot z}{\mathrm{d}t} + \dot z\frac{\mathrm{d}m(t)}{\mathrm{d}t} = m(t)\frac{\mathrm{d}\dot z}{\mathrm{d}t} - \dot z\lambda\dot z m(t) \tag{24}$$

$$\rightarrow \frac{\mathrm{d}\dot z}{\mathrm{d}t} = -g + \lambda\dot z^2. \tag{25}$$

En procédant comme précédemment, on définit une vitesse limite $v_{\infty,2}$ et un temps caractéristique τ_2 :

$$v_{\infty,2} = \sqrt{\frac{g}{\lambda}} = 1{,}4\cdot 10^2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \tag{26}$$

$$\rightarrow \tau_2 = \frac{v_{\infty,2}}{g} = 14\,\mathrm{s}. \tag{27}$$

(**b**) Si la durée de chute était grande devant τ_2, on pourrait supposer que $\dot z$ est pratiquement toujours égale à $-v_{\infty,2}$ et estimer sous cette hypothèse une durée $h_2/v_{\infty,2} = 21{,}5\,\mathrm{s}$. L'hypothèse n'est donc pas satisfaisante et on doit plutôt résoudre l'équation différentielle non linéaire du premier ordre en $\dot z$:

$$\frac{\mathrm{d}\dot z}{\mathrm{d}t} = -\frac{v_{\infty,2}}{\tau_2} + \frac{\dot z^2}{v_{\infty,2}\tau_2} = -\frac{v_{\infty,2}}{\tau_2}\left(1 - \frac{\dot z^2}{v_{\infty,2}^2}\right) \tag{28}$$

En utilisant les variables adimensionnées positives $u \equiv -\dot z/v_{\infty,2}$ et $\theta = t/\tau_2$ on réécrit :

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = 1 - u^2 \rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{1 - u^2} = \mathrm{d}\theta. \tag{29}$$

On obtient donc :

$$\int_{u=0}^{u}\frac{\mathrm{d}u}{1 - u^2} = \int_{\theta=0}^{\theta} \rightarrow \mathrm{argth}(u) - 0 = \theta - 0 \rightarrow \tanh(\theta) = u \rightarrow \dot z = -v_{\infty,2}\tanh(t/\tau_2). \tag{30}$$

On intègre une nouvelle fois pour obtenir :

$$z(t) - h = -v_{\infty,2}\tau_2\,(\ln(\cosh(t/\tau_2)) - 0). \tag{31}$$

La durée de chute T_2 est celle pour laquelle $h = 0$, soit :

$$T_2 = \tau_2\,\mathrm{argch}\left(\exp\left(\frac{h}{v_{\infty,2}\tau_2}\right)\right) = 31\,\mathrm{s}. \tag{32}$$

III.2. (**a**) et (**b**) Puisque $V = 4\pi\rho r^3/3$ est un polynôme de degré 3 en r, on reconnaît une dérivée logarithmique :

$$\frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{3}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}. \tag{33}$$

L'équation (3) donne alors, en notant r_0 le rayon au début du mouvement, *ie* à l'altitude h_2 :

$$\frac{3}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \lambda v(t) = -\lambda \dot{z} \to 3\ln\left(\frac{r}{r_0}\right) = \lambda(h_2 - z) \to r = r_0 \exp\left(\frac{\lambda(h_2 - z)}{3}\right). \tag{34}$$

Pour $z = 0$, et pour $r_0 = 1{,}0 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{mm}$, on calcule :

$$r = r_0 \exp\left(\frac{\lambda h_2}{3}\right) = 1{,}6 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{mm}. \tag{35}$$

La taille de la goutte n'a pas énormément varié puisque h_2 n'est pas grand devant $1/\lambda$. La goutte de rayon $1{,}0 \cdot 10^{-1}$ mm verra son rayon croître du même facteur.

III.3. (**a**) On calcule :

$$v_{\infty,1} = \frac{2r^2 g\rho}{9\eta} = v_{\infty,2} = 1{,}4 \cdot 10^2\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} \text{pour : } r = \sqrt{\frac{9\eta v_{\infty,2}}{2g\rho}} = 1{,}0\,\mathrm{mm}. \tag{36}$$

(**b**) La force de frottement de l'expression (1) a un effet d'autant plus important que les gouttes sont petites (voir l'expression (15)). On pourra donc la négliger devant le phénomène d'accrétion quand les gouttes ont atteint, du fait justement de l'accrétion, une taille de l'ordre du mm. On distinguerait différentes phases dans le mouvement :

- pour des gouttes de faible taille, mouvement à vitesse constante $v_{\infty,1}$, et coalescence donnée par la l'expression (35) (indépendant de la présence de frottement fluide)
- pour des grosses gouttes (donc de pluie), mouvement dominé par la force de frottement effectif du à la coalescence, en négligeant le frottement fluide.

Néanmoins, il faut des nuages très épais pour observer la deuxième partie….